ECOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES — ECOLE SUPERIEURE D'ELECTRICITE

ECOLE CENTRALE DE LYON — 1979 — ECOLE SUPERIEURE D'OPTIQUE

MATHEMATIQUES II (M, P') -(1 page dactylographiée)

N.B. a) La troisième question est indépendante des questions suivantes.
b) Le résultat fourni par l'énoncé de la sixième question pourra être utilisé pour traiter les septième et huitième questions, même s'il n'a pas été justifié.

Notations : On donne :

-trois réels strictement positifs α, β, ρ, liés par $\alpha^2 + \beta^2 = \rho^2$;

-un espace affine euclidien orienté $\mathcal{E}$, associé à un espace vectoriel E, et rapporté à un repère orthonormé positif $\mathcal{R} = (O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

A et B sont les points de $\mathcal{E}$ tels que $\overrightarrow{OA} = (\beta + \rho)\vec{k}$ et $\overrightarrow{OB} = \alpha\vec{i}$;

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont les fonctions du temps, à valeurs dans E, définies par :

$\overrightarrow{u(t)} = \vec{i} \cos t + \vec{j} \sin t$; $\overrightarrow{v(t)} = \vec{k} \wedge \overrightarrow{u(t)}$

Un espace affine euclidien $\mathcal{E}'$ est mobile par rapport à $\mathcal{E}$; Σ est une sphère de $\mathcal{E}'$ de rayon ρ, centrée au point S de $\mathcal{E}'$. Le mouvement de $\mathcal{E}'$ par rapport à $\mathcal{E}$, noté $\mathcal{E}'/\mathcal{E}$, est défini par les trois conditions suivantes :

a) Un point de Σ (abusivement noté A) occupe à tout instant la position A dans $\mathcal{E}$;

b) A tout instant t, la position $\Sigma(t)$ de Σ dans $\mathcal{E}$ est tangente au plan $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ en le point P(t) tel que $\overrightarrow{OP(t)} = \alpha \overrightarrow{u(t)}$;

c) Le point de Σ qui occupe à l'instant t la position P(t) dans $\mathcal{E}$ admet, à cet instant t, un vecteur vitesse nul (dans son mouvement par rapport à $\mathcal{E}$).

1°- Montrer qu'à tout instant t il existe un axe instantané de rotation $\Delta(t)$ de $\mathcal{E}'/\mathcal{E}$ et déterminer cette droite.

-Indiquer la nature des surfaces $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ qu'elle engendre relativement à $\mathcal{E}$ et relativement à $\mathcal{E}'$. Montrer qu'à tout instant t, la position $\mathcal{R}'(t)$ de $\mathcal{R}'$ dans $\mathcal{E}$ est tangente à $\mathcal{R}$ en tous les points de $\Delta(t)$.

2°- Calculer les composantes dans la base $(\overrightarrow{u(t)}, \overrightarrow{v(t)}, \vec{k})$ de E du vecteur rotation instantanée $\overrightarrow{\Omega(t)}$ de $\mathcal{E}'/\mathcal{E}$ à l'instant t.

3°- Pour t donné, déterminer l'ensemble des points M de Σ tels que le vecteur vitesse de M à l'instant t soit orthogonal à $\overrightarrow{M(t)S(t)}$.

4°- Soit $\mathcal{R}' = (A ; \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ le repère de $\mathcal{E}'$ tel que $\vec{I}$, $\vec{J}$, $\vec{K}$ soient des fonctions dérivables du temps à valeurs dans E vérifiant les deux conditions :

a) A tout instant t, $(A ; \overrightarrow{I(t)}, \overrightarrow{J(t)}, \overrightarrow{K(t)})$ est un repère orthonormé positif de $\mathcal{E}$ dans lequel : $\overrightarrow{K(t)} = \dfrac{\overrightarrow{AS(t)}}{\|\overrightarrow{AS(t)}\|}$;

b) A l'instant t = 0, la fonction $\vec{I}$ prend la valeur $-\vec{j}$.

- Donner les composantes dans la base $(\overrightarrow{u(t)}, \overrightarrow{v(t)}, \vec{k})$ de E du vecteur $\overrightarrow{K(t)}$, et celles du vecteur $\overrightarrow{w(t)} = \overrightarrow{v(t)} \wedge \overrightarrow{K(t)}$

- Justifier l'existence d'une fonction ϕ du temps telle que $\vec{I} = \vec{w} \cos \phi + \vec{v} \sin \phi$; déterminer cette fonction (on calculera d'abord sa dérivée).

- Donner les composantes de $\overrightarrow{I(t)}$, $\overrightarrow{J(t)}$, $\overrightarrow{K(t)}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de E ; en déduire les coordonnées dans le repère $\mathcal{R}$ de $\mathcal{E}$ de la position à l'instant t du point de $\mathcal{E}'$ dont les coordonnées (fixes) dans le repère $\mathcal{R}'$ sont (X,Y,Z).

5°- Quelle est la nature de l'ensemble $\mathcal{C}$ des points de la sphère Σ qui se trouvent périodiquement dans le plan $(O ; \vec{i}, \vec{j})$? Définir avec précision le sous-ensemble de $\mathcal{E}$ qui est engendré, quand t varie, par la position de C à la date t.

6°- Dans toute la suite, on suppose $\beta = \dfrac{\rho}{2}$ et donc $\alpha = \dfrac{\rho\sqrt{3}}{2}$.

-Soit M le point de Σ qui coïncide avec B à l'instant t = 0. Calculer les coordonnées de M dans le repère $\mathcal{R}'$ de $\mathcal{E}'$.

-Soit Γ la trajectoire de M dans son mouvement par rapport à $\mathcal{E}$. Montrer que Γ admet, dans le repère $\mathcal{R}_1 = (B ; \vec{I}, \vec{j}, \vec{k})$ la représentation paramétrique :

$x_1 = \dfrac{3}{2}\alpha \cos t (1 - \cos t)$; $y_1 = \dfrac{3}{2}\alpha \sin t (1 - \cos t)$; $z_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\alpha (1 - \cos t)$.

7°- Construire avec soin les projections orthogonales de Γ sur les plans de coordonnées du repère $\mathcal{R}_1$; dans $(B ; \vec{I}, \vec{j})$ on utilisera des coordonnées polaires ; dans $(B ; \vec{I}, \vec{k})$ on précisera la nature de la projection.

Montrer que la trajectoire Γ est l'intersection d'une sphère $\mathcal{S}$ et d'un cône de révolution $\mathcal{K}$; quelle particularité présente-t-elle au point B ?

8°- Quelle est la longueur de l'arc de Γ qui correspond à $t \in [0, \pi]$?

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail